R חוג

$S \subseteq R$ קבוצה במרכז של החוג, איבריה רגולריים, סגורה לכפל, $1 \in S$.

$$R \subseteq S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{s} \middle| \begin{array}{c} a \in R \\ s \in S \end{array} \right\}$$

לדוגמה, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \langle 2 \rangle^{-1}\mathbb{Z}$

אם $A \lhd S^{-1}R$, אז $A \cap R \lhd R$, שכן תמיד ניתן לחתוך אידאל באמצעות תת חוג ולקבל אידאל של התת חוג. לכן ניתן להגדיר הומומורפיזם $\Psi : A \mapsto A \cap R$ חח"ע. ההומומורפיזם בכיוון ההפוך Φ הוא על.

אם לוקחים אידאל אמיתי של $S^{-1}R$ מקבלים אידיאלים של R הזרים לS. זהו צימצום של ההעתקות, והן נשארות חח"ע ועל בהתאמה.

כל אידאל הוא מהצורה $S^{-1}I$.

תזכורת

$P \lhd R$ ראשוני אם $I \subseteq P \Leftarrow II' \subseteq P$ או $I' \subseteq P$.

טענה 1

יהי $P \lhd R$ ראשוני וזר לS. אז $R \cap S^{-1}P = P$

הוכחה

ברור ש$R \cap S^{-1}P \supseteq P$. נוכיח את ההכלה בכיוון ההפוך.

נניח ש$x \in R \cap S^{-1}P$. אז קיימים $\begin{array}{c} a \in P \\ s \in S \end{array}$ כך ש$x = \frac{a}{s}$ וגם קיים $x_0 \in R$ כך ש$x = \frac{x_0}{1}$.

$$x = \frac{x_0}{1} = \frac{a}{s} \Leftrightarrow a = sx_0$$

לכן

$$Rs \cdot Rx_0R = sRx_0R = Rsx_0R = RaR \subseteq P$$

P ראשוני ולכן מכיל אחד האידאלים, אבל $s \notin P$ ולכן $x = \frac{x_0}{1} \in P \Leftarrow x_0 \in Rx_0R \subseteq P$.

טענה 2

אם $P \lhd R$ ראשוני וזר לS, אז $S^{-1}P$ ראשוני.

הוכחה

כל אידאל של $S^{-1}R$ הוא מהצורה $S^{-1}I$ כאשר $I \lhd R$. נניח ש$I_1I_2 \subseteq S^{-1}I_1 \cdot S^{-1}I_2 \subseteq S^{-1}P$. הרי גם $I_1I_2 \subseteq R$ ולכן

$$I_1I_2 \subseteq S^{-1}P \cap R = P$$

$$\Leftarrow \quad \begin{array}{ccc} I_1 \subseteq P & \text{או} & I_2 \subseteq P \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ S^{-1}I_1 \subseteq S^{-1}P & & S^{-1}I_2 \subseteq S^{-1}P \end{array}$$

טענה 3

נניח ש$A \lhd S^{-1}R$ אידאל ראשוני אמיתי. אז $A \cap R$ ראשוני.

הוכחה

נניח ש$I_1, I_2 \lhd R$ כך ש$I_1I_2 \subseteq A \cap R$. אז

$$S^{-1}I_1 \cdot S^{-1}I_2 = S^{-1}I_1I_2 \subseteq S^{-1}(A \cap R) = A$$

מכיוון שA ראשוני, קיים k כך ש$s^{-1}I_k \subseteq A$. לכן $I_k \subseteq S^{-1}I_k \cap R \subseteq A \cap R$

משפט

Φ, Ψ הן התאמה חח"ע ועל בין אידיאלים ראשוניים של $S^{-1}R$ לבין אידיאלים ראשוניים של R שזרים לS.

הגדרה - מיפום

כעת, נניח שR תחום שלמות(=חוג קומוטטיבי ללא מחלקי אפס).
יהי P אידאל ראשוני של R. נסתכל על המשלים שלו - $S = R - P$.

S הוא:
- במרכז
- מכיל איברים רגולריים
- כולל את 1

S לגור לכפל כי P ראשוני.
קיבלנו

$$R_P = S^{-1}R = (R - P)^{-1} R$$

R_P נקרא <u>המיפום</u>(localization) של R בP.

דוגמה

$P = 5\mathbb{Z}$,$R = \mathbb{Z}$

$$R_p = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \begin{array}{c} a \in \mathbb{Z} \\ b \notin P \end{array} \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| 5 \nmid b \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$= \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots\right] = \{x | 5 \nmid b \text{ עם } x = \frac{a}{b} \text{ אפשר להציג}\}$$

הוכחנו שהמיפוס R_P הוא חוג המכיל את R ושבו כל איבר שאינו בP הפיך.

טריוויאלי: R_P קומוטטיבי.

לפי המשפט שהוכחנו,

$$\begin{array}{rcl} A \cap R & \leftrightarrow & A \lhd R_p \\ I \lhd R & \mapsto & (R-P)^{-1} I \end{array}$$

הן התאמות חח"ע ועל בין אידאלים ראשוניים של R_P לאידאלים ראשוניים של R שמוכלים בP.

מכיוון שP מכיל כל אידאל המוכל בR

$(R-P)^{-1} P = P_P$ מכיל כל אידאל המוכל בR_P

$\Leftarrow$ P_P מכיל כל אידאל המוכל בR_P

$\Leftarrow$ P_P הוא האידאל המקסימלי היחיד

מסקנה

R_P חוג מקומי.

בדוגמה, $[\frac{1}{b} | b \neq s]$ ראשוני $\mathbb{Z}[\frac{1}{b}] \subseteq \mathbb{Z}[\cdots] \cdot 5$ האידאל המקסימלי היחיד של $\mathbb{Z}_{5\mathbb{Z}}$.4

נניח שR תחום שלמות.

נבחר $P = 0$. זהו אידאל ראשוני.

$S = R - 0 = \{a \neq 0\}$. המיפוס נותן

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \begin{array}{c} a \in R \\ 0 \neq b \in R \end{array} \right\}$$

יש התאמה חח"ע ועל בין אידאלים ראשוניים של $S^{-1}R$ לבין 0 $\Leftarrow$ 0 הוא אידאל מקסימלי של $S^{-1}R$ ולכן $S^{-1}R$ הוא שדה(קל גם לראות זאת ישירות מההגדרה).

מסקנה

כל תחום שלמות R מוכל בשדה:

$$R \subseteq (R-0)^{-1} \cdot R$$

לדוגמה: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

מסקנה

תחומי שלמות הם תת־חוגים של שדות
]תחומים $\subsetneq$ תת־חוגים של חוגי חילוק[

הגדרה

לשדה R $(R-0)^{-1}$ קוראים "שדה השברים של R". מסמנים $q(R)$

דוגמאות

- $$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

- $$q\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{Q}$$

- אם $\mathbb{F} = q(R)$, $R \subseteq R' \subseteq \mathbb{F}$ אז $q(R') = \mathbb{F}$.

- $$q\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right) = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \middle| a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

- $\mathbb{F}$ שדה.
  - $$q(\mathbb{F}[x]) = \left\{\frac{f(x)}{g(x)} \middle| g \neq 0\right\} = \mathbb{F}(x)$$
  - $$\mathbb{F}[x,y] \subseteq (\mathbb{F}(x))[y] \subseteq \underbrace{\mathbb{F}(x)(y)}_{=\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right\}} = \mathbb{F}(x,y)$$
  - $$q(\mathbb{Z}[x]) = \mathbb{Q}(x)$$

ובאופן כללי

$$q\left(R\left[x\right]\right)=q\left(R\right)\left(x\right)$$

$$q\left(\mathbb{F}\left[\left[x\right]\right]\right)=\mathbb{F}\left(\left(x\right)\right)$$

בעיה

לתאר את

$$\begin{array}{ccc} q\left(\mathbb{Z}\left[\left[x\right]\right]\right) & \subset & \mathbb{Q}\left(\left(x\right)\right) \\ || & & \\ \left\{\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}\middle| a_n,b_n\in\mathbb{Z}\right\} & & \end{array}$$

קצת תיאוריה

R תחום שלמות. אם $S\subseteq S_1\subset R$ סגורות לכפל,

$$R\hookrightarrow S^{-1}R\hookrightarrow q\left(R\right)=\left(R-0\right)^{-1}R$$

$$a\mapsto\frac{a}{1}$$

$$\frac{a}{s}\mapsto\frac{a}{s}$$

$$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\right)\subseteq\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\subseteq\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{11},\dots\right]\subseteq\mathbb{Q}$$

בפרט אם $P\subseteq P_1$ שניהם ראשוניים,

$$R\hookrightarrow R_P\hookrightarrow R_{P_1}\hookrightarrow q\left(R\right)$$

בפרט כל החוגים המקומיים שבנינו מקיימים

$$R\subseteq R_p\subseteq\mathbb{F}=q\left(R\right)$$

משפט

יהי R תחום שלמות, $\mathbb{F} = q(R)$

$$\bigcap_{\substack{R \subseteq L \subseteq \mathbb{F} \\ L \text{ is local}}} L = R$$

הגדרה

השיכון $R \to S^{-1}R$ הוא על $\Leftrightarrow$ איברי S הפיכים כבר בR.

בפרט, אם $\mathbb{F}$ שדה, $q(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$

מסקנה

אם $R \subseteq R_1 \subseteq \mathbb{F}$, $\mathbb{F} = q(R)$, אז

$$\mathbb{F} = q(R) \subseteq q(R_1) \subseteq q(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$$

$$\Downarrow$$

$$q(R_1) = \mathbb{F}$$